КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математических методов и исследования операций в экономике

И.В. Лукашова

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В EXCEL

Учебно-методическое пособие

Бишкек 2011

УДК 004
ББК 32.973-01
Л 84

Рецензенты:
доц. Кыргызско-Европейского факультета ИИМОП КНУ
И.Н. Рачковская,
дир. института мультимедия НОУ «МАО» УНПК МУК
Е.Ю. Савченко,
канд. физ.-мат. наук, доц.
С.К. Кыдыралиев

Рекомендовано к изданию УМС экономического факультета КРСУ

Лукашова И.В.

Л 84 РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В EXCEL: Учебно-методическое пособие. Бишкек: КРСУ, 2011. 57 с.

ISBN 978-9967-05-820-0

Представлена технология решения экстремальных задач, широко применяемых в экономической практике с использованием инструментов табличного процессора Microsoft Excel 2010.

Предназначено для студентов экономического факультета, обучающихся по направлениям «Экономика» и «Менеджмент», а также для студентов факультета заочного обучения соответствующих направлений.

УДК 004
Л 2404090000-11 ББК 32.973-01

ISBN 978-9967-05-820-0

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы, получившие заметное развитие во второй половине XX века, благодаря созданию и распространению компьютерной техники, стали играть существенную роль в экономической практике. Одним из эффективных направлений применения математических методов в экономике стало математическое программирование, тесно связанное с практическими проблемами оптимального распределения ограниченных ресурсов: людских, материальных, финансовых, временных для рационального функционирования предприятия, отрасли или экономики страны в целом.

Именно это обстоятельство побудило сделать акцент в учебно-методическом пособии на технологии решения экстремальных задач в экономике.

Структура пособия содержит:

- определение цели и задач;
- введение основных понятий;
- постановку и назначение задач математического программирования;
- постановку и назначение задач линейного программирования;
- пошаговое решение нескольких поставленных задач;
- набор задач для самостоятельного решения;
- контрольные вопросы;
- тесты.

Все разобранные и предложенные для самостоятельной работы задачи решаются с помощью встроенных инструментов Microsoft EXCEL 2010.

Пособие предназначено для студентов КРСУ, обучающихся по направлениям «Экономика» и «Менеджмент».

Цель и задачи пособия

Цель настоящего пособия состоит в формировании навыков решения экстремальных задач в среде EXCEL.

Задачи:

- Освоение инструментов EXCEL для решения экстремальных задач.
- Ознакомление с нюансами, возникающими при решении экстремальных задач в EXCEL.
- Использование изученных инструментов для решения экономических задач.

Основные понятия

Экстремум функции – максимальное или минимальное значение достигаемое функцией в ее области определения[1]. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума.

Безусловный экстремум – минимальное или максимальное значение, достигаемое функцией при отсутствии условий, ограничивающих область определения функции.

Условный экстремум – минимальное или максимальное значение, достигаемое функцией при наличии условий, ограничивающих область определения функции.

Локальный экстремум. Точка $\mathbf{x_0}$ называется точкой локального максимума функции $\mathbf{f(x)}$, если существует такая окрестность точки $\mathbf{x_0}$, что для всех $\mathbf{x}$ из этой окрестности $\mathbf{f(x_0) > f(x)}$.

Точка $\mathbf{x_0}$ называется точкой локального минимума функции $\mathbf{f(x)}$, если существует такая окрестность точки $\mathbf{x_0}$, что для всех $\mathbf{x}$ из этой окрестности $\mathbf{f(x_0) < f(x)}$.

Значение функции в точке максимума называется локальным максимумом, в точке минимума – локальным минимумом функции.

Максимум или минимум функции, определенные выше, называют локальными экстремумами.

Глобальный экстремум – наибольшее или наименьшее значение функции на заданном множестве называется глобальным экстремумом. Глобальный экстремум может достигаться либо в точках локального экстремума, либо на границах заданного множества.

Экономико-математическая модель – упрощенное формализованное описание экономического явления или процесса математическим языком с целью выявления функциональных взаимосвязей между переменными.

Экзогенная переменная – переменная, значение которой формируется вне модели.

Эндогенная переменная – переменная, значение которой формируется внутри модели.

[1] Область изменения независимых переменных, при которых функция имеет смысл.

Целевая функция – функция цели, значение которой зависит от значений эндогенных переменных. Эта функция позволяет оценивать варианты решений.

Итерация – одно из ряда повторений некоторой последовательности действий, использующее результат выполнения предыдущей аналогичной последовательности действий.

Численные методы реализуют алгоритмы, позволяющие получать приближенное численное решение математических задач.

Математическое программирование

Существует множество форм деятельности предприятий, которые связаны с распределением ресурсов. Под ресурсами понимаются труд, сырье, оборудование, денежные средства и т.д. Поскольку объемы ресурсов всегда ограничены, то возникают определенные проблемы, связанные с наиболее эффективным их использованием. Критерии эффективности использования ресурсов могут быть весьма разнообразными от максимизации прибыли, полученной от продажи произведенной продукции за месяц до минимизации еженедельных затрат труда.

Процесс распределения ресурсов называют программированием, т.е. созданием программы действий по их распределению.

Если некоторую задачу принятия решения можно сформулировать как задачу оптимизации вещественной функции **n** неотрицательных вещественных переменных, подчиненных **m** произвольным ограничениям, то такая задача является задачей математического программирования. Методы решения таких задач составляют раздел математики под названием математическое программирование.

$$f(x_1, x_{2,\dots,} x_n) \to Max$$

при

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_{2,\dots,} x_n) \le 0 \\ g_2(x_1, x_{2,\dots,} x_n) \le 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_{2,\dots,} x_n) \le 0 \end{cases}$$

Среди задач математического программирования можно выделить:

- детерминированные задачи, в которых вся исходная информация является полностью определенной;
- стохастические задачи, в которых исходная информация содержит элементы неопределенности, либо когда некоторые параметры задачи носят случайный характер с известными вероятностными характеристиками.

Задача математического программирования может быть задачей:

- линейного программирования – все компоненты задачи, целевая функция и ограничения, линейны;
- нелинейного программирования – хотя бы один из компонентов задачи содержит нелинейность.

Кроме того, достаточно часто в практических задачах естественным является требование целочисленности полученных результатов. В этом случае задачи могут быть:

- целочисленного программирования – условие целочисленности налагается на все переменные;
- частично целочисленного программирования – условие целочисленности налагается на часть переменных.

Линейное программирование

В 1938 г. 26-летний советский математик Л.В. Канторович[2], работая научным консультантом на фанерной фабрике, впервые сформулировал линейную задачу оптимального распределения ограниченных производственных ресурсов[3] и предложил соответствующий математический метод ее решения.

Американский математик Дж. Данциг, занимаясь планированием в оборонной сфере США, в 1947 г., независимо от Л.В. Канторовича сформулировал линейную задачу оптимального распределения ограниченных ресурсов, которой дал название «линейное программирование». Он же предложил для ее решения метод, известный под названием симплекс-метода. После чего начался бурный процесс применения задач линейного программирования в самых разнообразных сферах хозяйственной деятельности человека[4].

---

[2] Годы жизни 1912 –1986

[3] Закодированная тема исследования – «задача фантреста»

[4] Военной, промышленной и др.

Линейное программирование дало толчок развитию новых математических методов оптимизации – оно стало ядром более общего научного направления в прикладной математике – математического программирования[5]. Таким образом, линейное программирование – раздел математического программирования, изучающий методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной целевой функцией и линейными ограничениями.

Постановка задачи. При построении математической модели задачи линейного программирования, необходимо определить количественную характеристику цели, которой надо достичь в процессе оптимизации, – ***целевую функцию.*** Это должен быть экстремум – максимальная прибыль или минимальные издержки в денежном, натуральном или в каком-либо другом выражении. Целевая функция показывает, почему одно рассматриваемое решение лучше или хуже другого. Целевая функция зависит от значений ***эндогенных переменных***, которые можно изменять, разыскивая оптимальное решение.

Цель оптимизации – найти такие значения эндогенных переменных, при которых целевая функция достигает экстремума.

Любая оптимизация на практике всегда проводится при наличии некоторых ***ограничений*** **–** условий, ограничивающих изменение эндогенных переменных. Эти ограничения могут диктоваться:

- ограниченностью ресурсов, находящихся в распоряжении – денежных, временных, материальных и др.;
- установленными «правилами игры» – нормативные акты, требования лица, принимающего решения и т.д.;
- вторичными целями – в задаче минимизации рисков инвестиционного портфеля одновременно следует добиться ожидаемой прибыли.

  Любой набор эндогенных переменных, удовлетворяющих ограничениям задачи, называют ***допустимым решением*** или ***допустимым планом***. Таких планов может быть множество. Допустимое решение, которое отвечает наибольшему или наименьшему значению целевой функции, называется ***оптимальным решением.*** Обычно это

---

[5] http://exsolver.narod.ru/Intresting/History.html

решение одно, но встречаются модели, когда одному оптимальному плану соответствует множество допустимых решений.

Круг задач, решаемых при помощи методов линейного программирования достаточно широк. В частности:

- задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании;
- задача о смесях (управление составом продукта);
- задача о нахождении оптимальной комбинации различных видов продукции для хранения на складах (управление товарно-материальными запасами или «задача о рюкзаке»);
- транспортная задача (управление перемещением грузов).

Ниже приведена общая задача линейного программирования.

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to Max$$

при

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \ldots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1} \\ a_{k+21}x_1 + a_{k+22}x_2 + \ldots + a_{k+2n}x_n = b_{k+2} \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Чаще используется постановка задачи линейного программирования в стандартном виде, допускающая естественную экономическую интерпретацию.

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Max$$

при

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \ (i = \overline{1,m}) \\ \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ (j = \overline{1,n})$$

Требуется найти неотрицательные числа $x_j \ge 0, \ (j = \overline{1,n})$, которые максимизируют (или минимизируют) линейную целевую функцию.

С точки зрения экономики обозначения можно трактовать следующим образом:

F – суммарный доход, получаемый от выпуска и реализации продукции *n* наименований;

$\boldsymbol{b_i}$ – количество ресурса вида *i*;

m – количество видов этих ресурсов;

$\boldsymbol{a_{ij}}$ – норма расхода ресурса вида *i* на единицу продукции вида *j*;

$\boldsymbol{x_j}$ – количество продукции вида *j*;

n – количество видов продукции;

$\boldsymbol{c_j}$ – доход (или другой выигрыш) от единицы этой продукции, а в случае задачи на минимум – затраты на единицу продукции.

Слово ***программирование*** объясняется тем, что неизвестные переменные, которые отыскиваются в процессе решения задачи, обычно в совокупности определяют программу работы некоторого экономического объекта. Слово ***линейное*** отражает факт линейной зависимости между переменными. При этом задача обязательно имеет экстремальный характер, т.е. состоит в отыскании экстремума (максимума или минимума) целевой функции.

Задача состоит в том, чтобы максимизировать доход, получаемый от реализации выпущенной продукции, путем создания оптимального плана производства при ограничении на ресурсы.

Такого рода модели, а также методы, позволяющие получить решение на построенных моделях, возникли как ответ науки на прямой заказ от бизнеса, поэтому их распространенность в реальной деловой практике велика. Оптимальные планы производства, продаж, закупок, перевозок, управление запасами и проектами, организация работы и оценка эффективности систем массового обслуживания – далеко не полный перечень применения задач линейного программирования в экономике.

Поиск решения

Поиск решения – дополнительная надстройка табличного процессора EXCEL, предназначенная для нахождения локальных и глобальных экстремумов функции одной или нескольких переменных. Забегая вперед отметим, что для многоэкстремальных функций одной переменной определить, какой из локальных экстремумов будет найден, достаточно сложно без построения графика функции на интересующем нас интервале, так как численные методы нахождения экстремума ориентированы на поиск ближайшего решения к точке начального приближения, с которой начинается поиск. Для многоэкстремальных функций многих переменных задача поиска требуемого локального экстремума еще больше усложняется.

Надстройка **Поиск решения** версии EXCEL 2010 позволяет решать экстремальные задачи, имеющие размерность не выше 100×200, где:

200 – количество переменных;

100 – количество формульных ограничений.

При этом количество ограничений на значения переменных не должно превышать 400.

По умолчанию надстройка **Поиск решения** отключена. Чтобы активизировать ее необходимо:

- выполнить команду **Файл/Параметры/Надстройки;**
- в поле **Управление** выбрать значение **Надстройки Excel;**
- нажать на кнопку **Перейти;**
- в поле **Доступные надстройки** установить флажок рядом с пунктом **Поиск решения;**
- ОК.

После активизации **Поиск решения** будет находиться на вкладке **Данные** в группе **Анализ** (рис. 1).

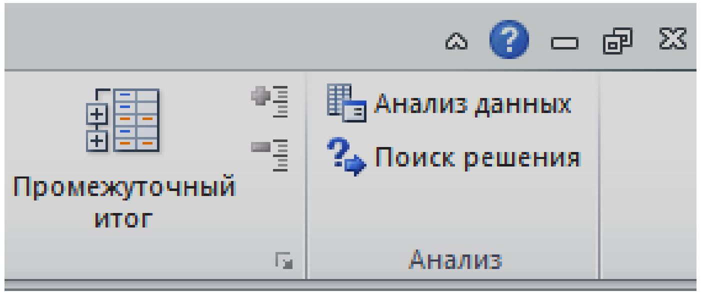

Рис. 1

На рис. 2 представлено диалоговое окно **Параметры поиска решения.**

В окне **Параметры поиска решения** представлен набор полей и кнопок, которые позволяют сделать постановку экстремальной задачи:

- В поле **Оптимизировать целевую функцию** вводится адрес клетки листа EXCEL, в которой записана целевая функция.

- Среди переключателей выбирается тот, который отвечает за необходимый тип экстремума – **Максимум или Минимум** – если решается задача оптимизации, либо переключатель **Значение**, с последующим вводом конкретного значения в правостоящее от него поле – если требуется найти значение переменных, при которых целевая функция принимает наперед заданное значение[6].
- В поле **Изменяя ячейки переменных** вводятся адреса клеток или диапазонов, содержащих эндогенные переменные, изменение которых, оказывает влияние на целевую функцию.
- С помощью кнопок **Добавить, Изменить, Удалить и Сбросить** формируется система ограничений, отображающаяся в поле **В соответствии с ограничением.**

[6] Т.е. решить уравнение.

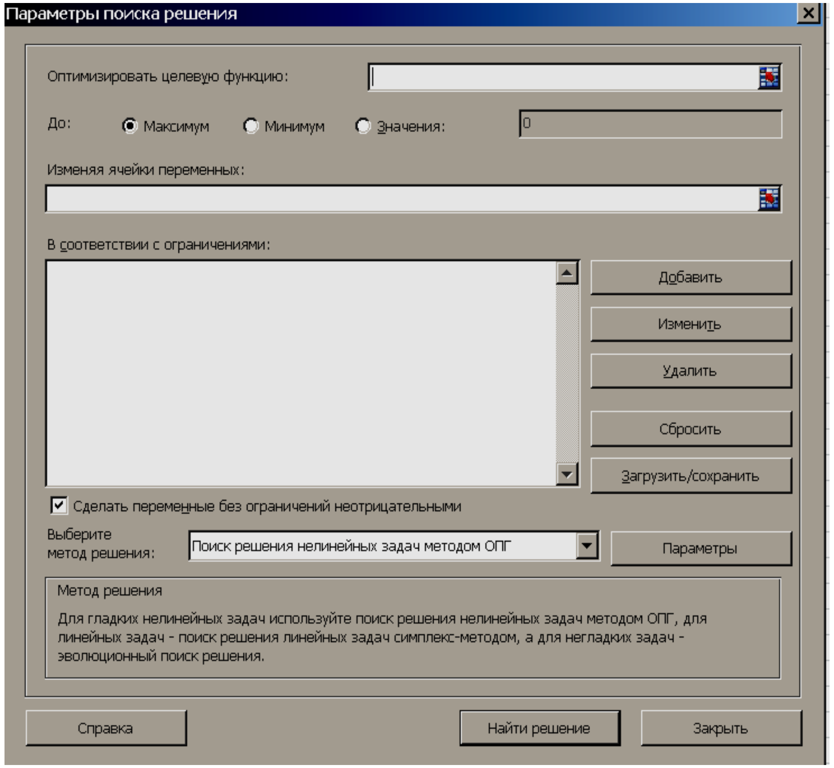

Рис. 2

- Флажок **Сделать переменные без ограничений неотрицательными** обычно выставляется для решения задач экономического характера, так как неотрицательность – это основное экономическое ограничение на эндогенные переменные.
- Список **Выберите метод решения** содержит три возможных для использования метода:
  – нелинейный метод обобщенного понижающего градиента (ОПГ) – для гладких нелинейных задач[7];
  – симплекс-метод – для линейных задач;

[7] Гладкая задача представлена гладкими функциями или непрерывно дифференцируемыми функциями, на всей области определения.

  – эволюционный метод[8] – для негладких задач[9].
- Кнопка **Загрузить/Сохранить** позволяет сохранить поставленную экстремальную задачу на листе EXCEL или загрузить ранее сохраненную.
- **Загрузить** – отрывает одноименное диалоговое окно, в котором можно ввести ссылку на диапазон ячеек, содержащих модель оптимизации.
- **Сохранить** – отрывает одноименное диалоговое окно, в котором можно ввести ссылку на диапазон ячеек, предназначенный для хранения модели оптимизации.

Кроме того, имеется кнопка **Параметры,** которая выводит на экран диалоговое окно настройки параметров **Поиска решения**. Рассмотрим его подробно, поскольку настраиваемые параметры оказывают серьезное влияние на точность и скорость вычислений.

Диалоговое окно **Параметры** содержит три вкладки: **Все методы**, **Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ**, **Эволюционный поиск решения**. На рис. 3 представлены параметры, имеющие отношение ко всем методам.

[8] В эволюционном методе не используются производные с целью определения траектории наискорейшего спуска, что представляет собой определенные преимущества для задач с негладкими функциями.

[9] Негладкие задачи содержат в своей постановке, хотя бы одну негладкую функцию, т.е. функцию, не имеющую первой производной, хотя бы в одной точке области определения. Таким образом, негладкая функция может быть прерывистой, недифференцируемой или стохастической функцией. «Я отворачиваюсь с отвращением и ужасом от этой жалкой язвы – функций, не имеющих производных». Более ста лет прошло с тех пор как Ш. Эрмит написал эти строки в письме к Т. Стилтьесу. Однако сегодня использование негладких функций отвечают потребностям современной экономической науки. Демьянов В.Ф. Обобщение понятия производной в негладком анализе. http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/.

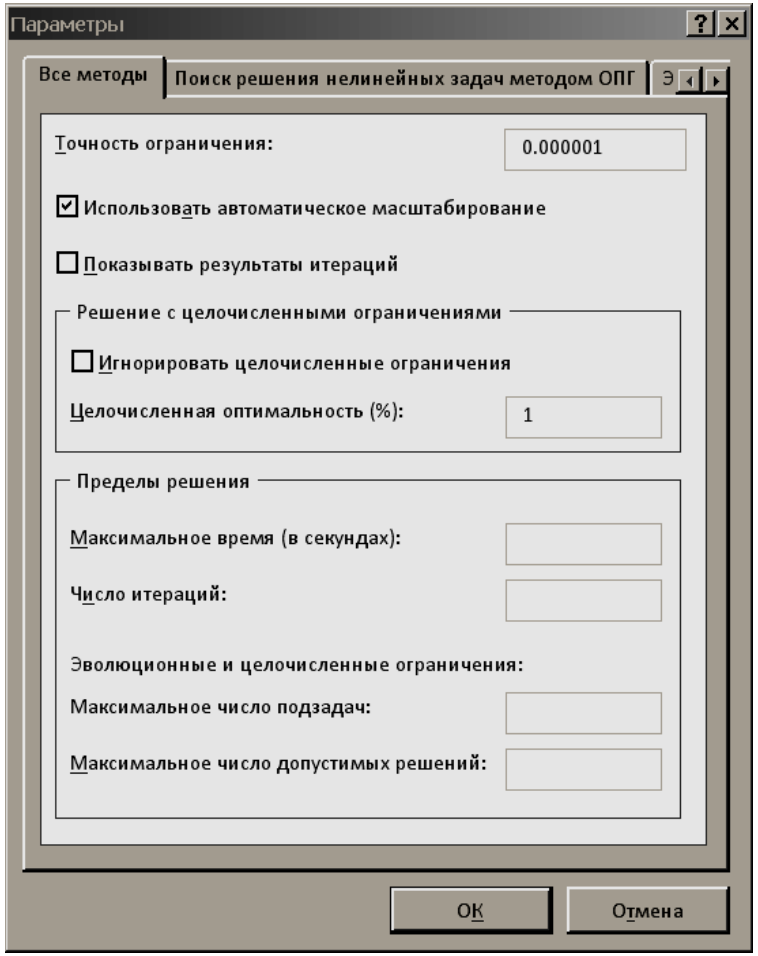

Рис. 3

В поле **Точность ограничения** вводится требуемая степень точности решения. Чем меньше введенное число, тем выше точность достигаемых результатов.

Флажок **Автоматическое масштабирование** используется, когда эндогенные переменные и значение целевой функции существенно раз-

личаются. Например, целевая функция выражена в процентах, а эндогенные переменные в миллионах сомов.

Флажок **Показывать результаты итераций** используется, если есть необходимость видеть ход решения, отслеживая значение целевой функции и эндогенных переменных после каждой итерации.

При решении целочисленной задачи:

- Флажок **Игнорировать целочисленные ограничения** используется в случае, когда есть необходимость снять ограничения на целочисленность по всем переменным.
- В поле **Целочисленная оптимальность** вводится процент отклонения полученного значения в целевой ячейке от заданного. Такое отклонение учитывается в том случае, когда на значения в изменяемых ячейках наложено ограничение целочисленности. Если за последние 5 итераций относительное изменение значения в целевой ячейке оказывается меньше числа, указанного в поле **Целочисленная оптимальность**, то решение считается найденным.

В поле **Максимальное время** указывается время, отводимое на поиск решения, в секундах, по истечении которого поиск решения будет прекращен даже в том случае, если решение не найдено или не оптимизировано. Допустимые значения – от 1 до 32767[10].

В поле **Число итераций** указывается максимальное допустимое количество итераций, после которого поиск решения будет прекращен даже в том случае, если решение не найдено или не оптимизировано. Допустимые значения – от 1 до 32767.

Если по прошествии отведенного времени или по достижении максимального количества итераций решение не будет найдено, на экране появится диалоговое окно **Показать предварительное решение.**

На рис. 4 представлены параметры, имеющие отношение к методу обобщенного понижающего градиента.

[10] Примерно девять часов. Значение 100, используемое по умолчанию, вполне приемлемо для решения большинства простых задач.

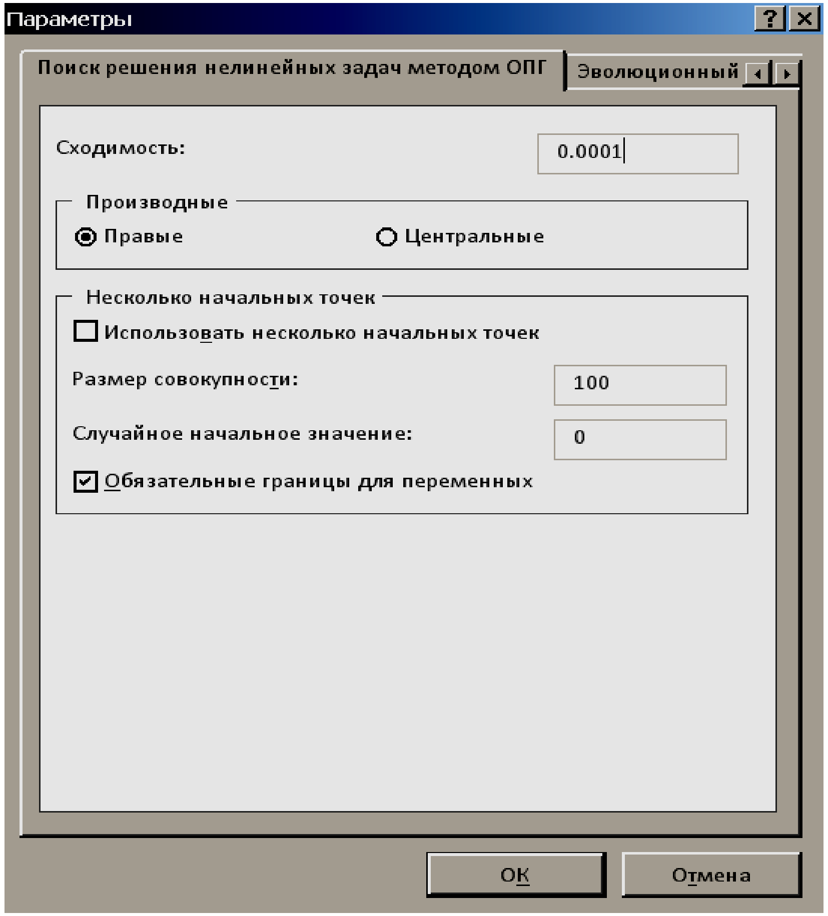

Рис. 4

Сходимость применяется только к нелинейным задачам. Когда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа, указанного в поле **Сходимость**, поиск прекращается. Вводимое число находится в диапазоне от 0 до 1. Чем меньше введенное число, тем выше точность вычислений.

Переключатель **Правые производные** используется в большинстве задач, где скорость изменения ограничений относительно невысока. Увеличивает скорость **Поиска решения.**

Переключатель **Центральные производные** используется для функций, имеющих разрывную производную. Данный способ требует больше вычислений, однако его применение может быть оправданным, если выдано сообщение о том, что получить более точное решение не удается.

Флажок **Использовать несколько начальных точек** устанавливается тогда, когда следует найти глобальный экстремум, при этом есть несколько локальных.

В поле **Размер совокупности** вводится количество точек, с которых следует выполнять **Поиск решения.** В этом случае глобальный экстремум будет найден сходимостью по вероятности.

В поле **Случайное начальное значение** вводится значение для генерации случайных чисел, используемых при поиске глобального экстремума.

Флажок **Обязательные границы для переменных** по умолчанию установлен, его снятие приводит, соответственно, к снятию ограничений, накладываемых на переменные.

На рис. 5 представлены параметры, имеющие отношение к эволюционному методу поиска решения.

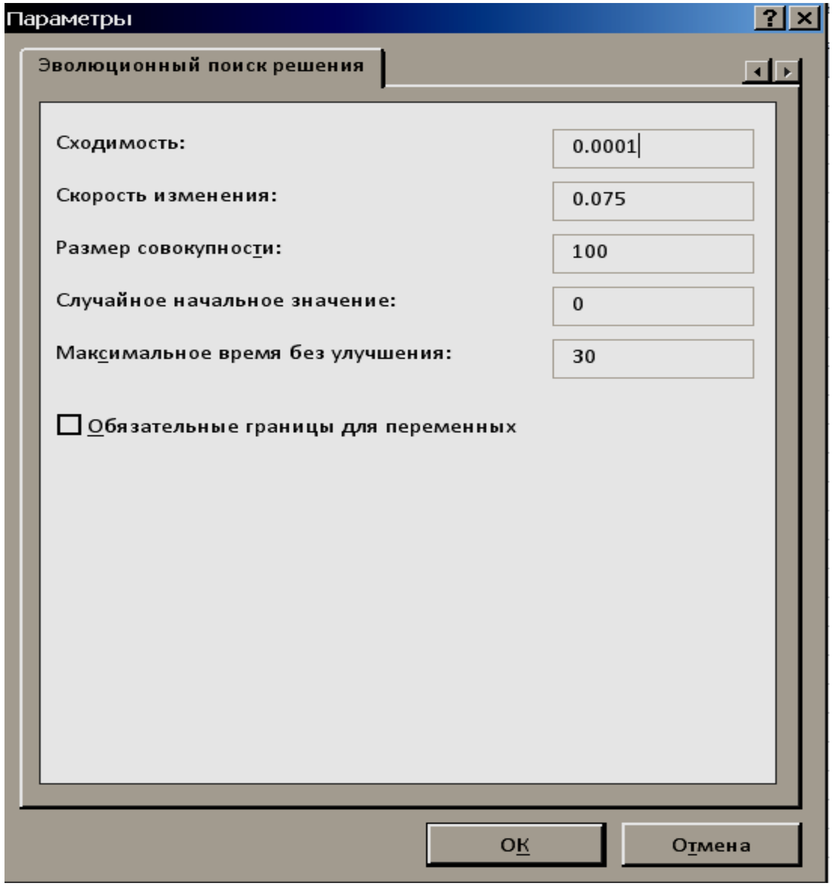

Рис. 5

В настоящее время умение пользоваться встроенными инструментами EXCEL существенно облегчает процесс решения экстремальных задач. Решение может быть получено с помощью одного из наиболее подходящих численных методов, реализованных в EXCEL. Экономисту, при решении практической задачи необходимо:

- на основе реальной ситуации сделать математическую постановку экстремальной задачи;

- определиться, если это требуется, с начальным приближением к решению из окрестности достаточно близкой к истинному решению, на основе здравого смысла;
- задать точность решения, которая имеет смысл с точки зрения экономической трактовки;
- формализовать задачу на листе EXCEL;
- выбрать подходящий метод решения из реализованных в EXCEL;
- оценить полученное решение.

Таким образом, деятельность экономиста смещается от решения задач к конструированию содержательных постановок и анализу полученных решений. Такая деятельность является существенно более эффективной для процесса принятия решений.

Задание № 1

Построить график функции на заданном интервале.

Найти все экстремумы функции на заданном интервале.

Алгоритм решения

а) Построить график функции на заданном интервале.

Построим график функции на интервале [–5; 2], для чего сформируем таблицу значений аргумента **x** и соответствующих значений функции **y**, как показано на рис. 6.

	A	B
1	x	y
2	-5	=((A2-1)^2*(A2+4))^(1/3)
3	-4	0.000
4	-3	2.520
5	-2	2.621
6	-1	2.289
7	0	1.587
8	1	0.000
9	2	1.817
10	3	3.037
11		

Рис. 6

Далее необходимо:

- выделить все полученные значения вместе с заголовками;
- выполнить команду **Вставка/Точечная** (с гладкими кривыми и маркерами);
- используя команды **Макет/Название диаграммы** и **Макет/Название осей** привести диаграмму к виду, показанному на рис. 7.

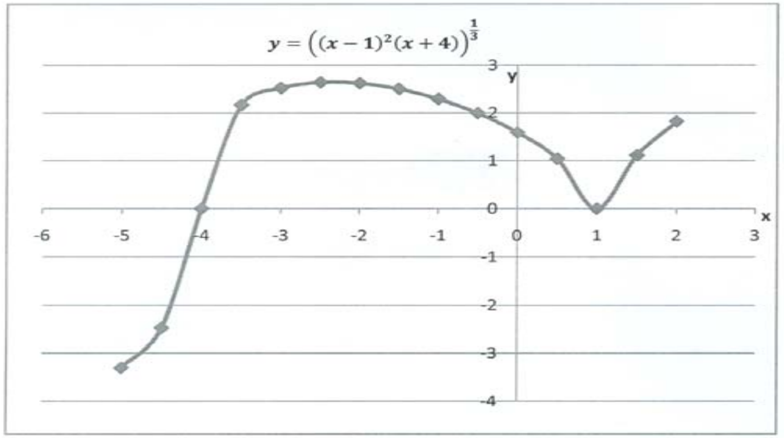

Рис. 7

б) *Найти все экстремумы функции на заданном интервале.*

Задача, предложенная для решения, относится к классу задач поиска условного экстремума функции одной переменной. До начала решения средствами EXCEL следует определиться с количеством экстремумов, которое подлежит поиску. На рис. 7 видно, что уравнение имеет два локальных экстремума.

Необходимо для каждого из экстремумов определить начальное приближение к решению, начиная с которого будет запущен алгоритм поиска решения с заданной точностью.

При определении начального приближения к решению следует помнить – будет найдено то решение, которое ближе всего находится к начальному приближению.

Если анализировать локальные экстремумы, т.е. точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс, слева направо, то[11]:

[11] Примерно

- max находится в диапазоне (–3; –1);
- min – в диапазоне (0; 2).

Таким образом, начальное приближение к решению может быть выбрано из предложенных диапазонов. Для определенности будем искать max, для чего определим начальное приближение к решению равным (–2).

Сформируем лист электронной таблицы, как показано на рис. 8. Функцию запишем в клетку С3, начиная со знака равенства, а вместо переменной **x** укажем адрес клетки В3, которая содержит значение начального приближения к решению равное (–2) и, которое будет меняться в процессе поиска решения. Для того чтобы зафиксировать начальное приближение, начиная с которого выполнялся поиск истинного решения, в клетку А3 также запишем значение равное (–2), которое, в отличие от записанного в клетку В3, сохранит свое значение неизменным.

	A	B	C	D
1	**Начальное приближение**	**x**	**y**	**Тип экстремума**
2	-2	-2	2.621	максимум
3				

Рис. 8

Следующим этапом следует воспользоваться инструментом **Поиск решения,** который предназначен для поиска условного и безусловного экстремумов функций многих переменных, а также для решения уравнений, зависящих от многих переменных.

- Выбрать команду **Данные/Поиск решения** и заполнить диалоговое окно **Параметры поиска решения.**
- В поле **Оптимизировать целевую функцию** ввести адрес клетки с функцией, в нашем случае это клетка С2 (абсолютный адрес которой $C$2 появится в поле).
- Среди кнопок альтернативного выбора выбрать кнопку **Максимум**.
- В поле **Изменяя ячейки переменных** ввести адрес клетки, в которой задано начальное приближение к решению, в нашем случае это клетка В2 (абсолютный адрес которой $B$2 появится в поле).
- В поле **В соответствии с ограничениями** следует ввести ограничения, распространяющиеся на поиск экстремума. Для чего следует

нажать на кнопку **Добавить**, в результате чего откроется диалоговое окно **Добавление ограничения**, которое следует поочередно заполнить так как показано на рис. 10.

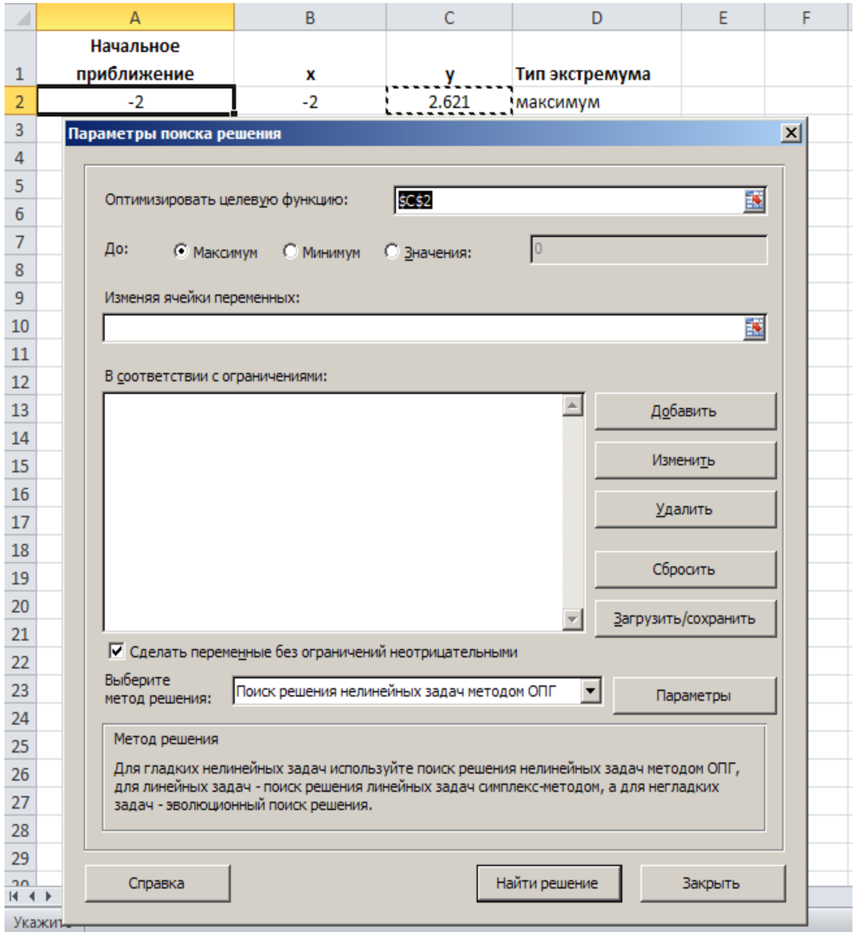

Рис. 9

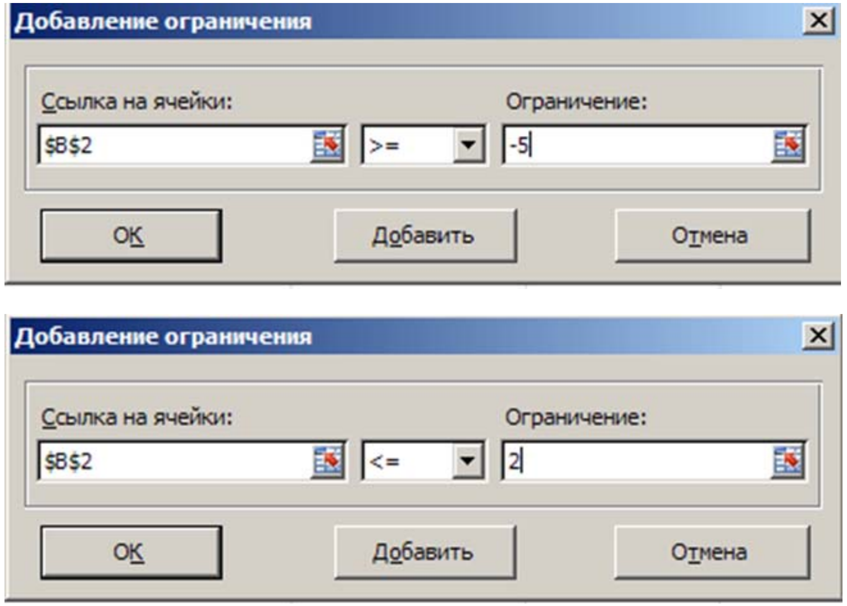

Рис. 10

- После чего диалоговое окно **Поиск решения** будет выглядеть следующим образом (рис. 11):

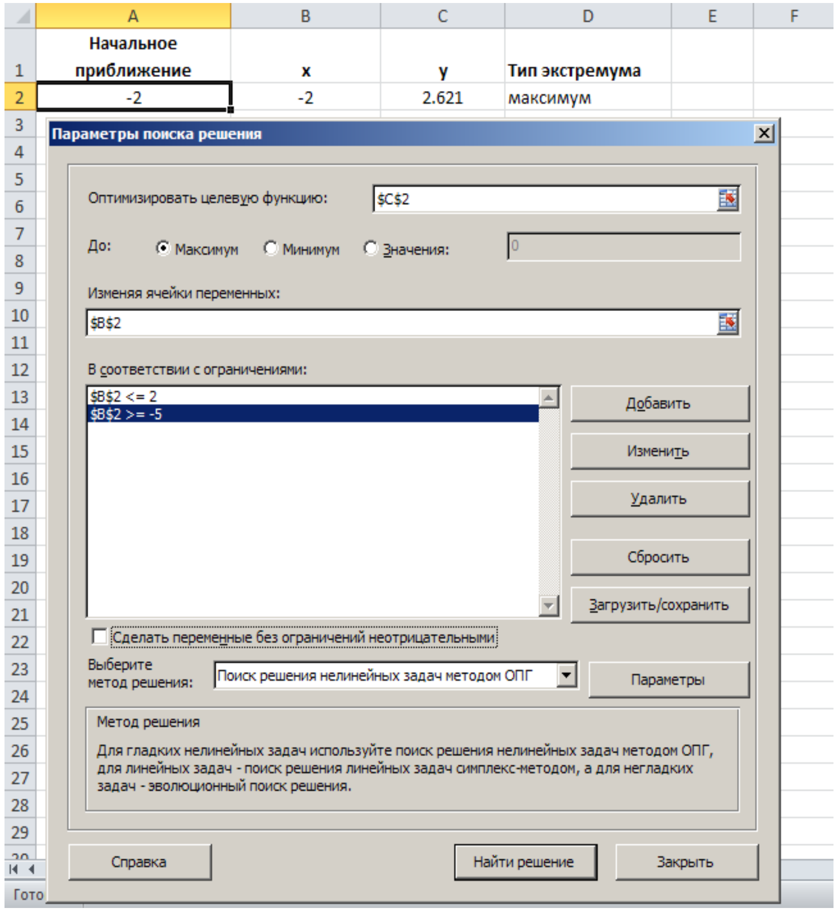

Рис. 11

- После выбора кнопки **Найти решение** появится окно **Результаты поиска решения**, в котором дается информация о том, найдено ли решение и чему оно равно (рис. 12).

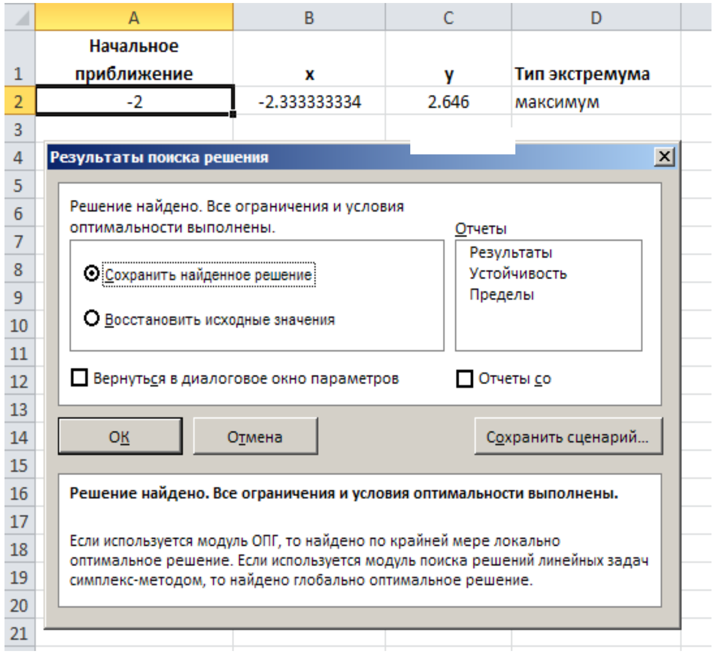

Рис. 12

- Выбираем кнопку альтернативного выбора **Сохранить найденное решение;**
- Ок.

Чтобы создать отчет, основанный на найденном решении, следует выбрать тип отчета в поле **Отчеты** и нажать кнопку ОК. Отчет будет помещен на новый лист книги. Если решение не будет найдено, будут доступны только некоторые из отчетов.

Нюансы решения

На рис. 13 представлена таблица зависимости получаемого решения от значения начального приближения к решению. Столбец тип экстремума содержит тот тип экстремума, который указывался в диалоговом окне **Поиск решения,** при постановке задачи для всех пяти исследований.

№№ исследования	Начальное приближение	Точка оптимума	Значение функции	Заданный тип экстремума	Фактический тип решения
1	-4	-5	-3.302	Минимум	Граничная точка
2	-3	-2.333	2.646	Максимум	Локальный максимум
3	-2.333	-2.333	2.646	Минимум	Локальный максимум
4	-1	1.000	0	Минимум	Локальный минимум
5	1.5	2.000	1.817	Максимум	Граничная точка

Рис. 13

Сопоставляя полученные значения экстремумов с графиком функции, изображенным на рис. 7, можно отметить несообразности в полученных результатах 1, 3 и 5 исследований.

Рассмотрим более подробно:

- *3 исследование*

Точка x = –2,333, с которой начинается поиск минимума – это точка максимума функции, и, следовательно, в ней уже выполняется условие равенства нулю производной. Попытка, начиная с этой точки, определить минимум приводит к тому, что **Поиск решения** указывает точку минимума как точку максимума.

- *1 и 5 исследования*

Точки (–4) и 1,5, с которых начинается поиск экстремумов, расположены ближе к границам отрезка, чем к точкам локальных экстремумов, в силу чего, в качестве решения будут найдены граничные точки.

Глобальный экстремум

В электронной таблице EXCEL 2010 были существенным образом улучшены функции **Поиска решения.** Появилась возможность автоматического поиска глобального экстремума, игнорируя локальные. Особенно это важно для поиска экстремума функции многих переменных, когда нет возможности графического отделения экстремумов и выбора начального приближения, способного привести к глобальному.

Для того, чтобы найти глобальный экстремум необходимо установить некоторые параметры в диалоговом окне **Параметры** вкладки **Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ** или вкладки **Эволюционный метод решения**.

В частности, для решения вышеописанной задачи, прежде чем запустить поиск решения следует установить в диалоговом окне **Параметры** вкладки **Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ** параметры так, как показано на рис. 14.

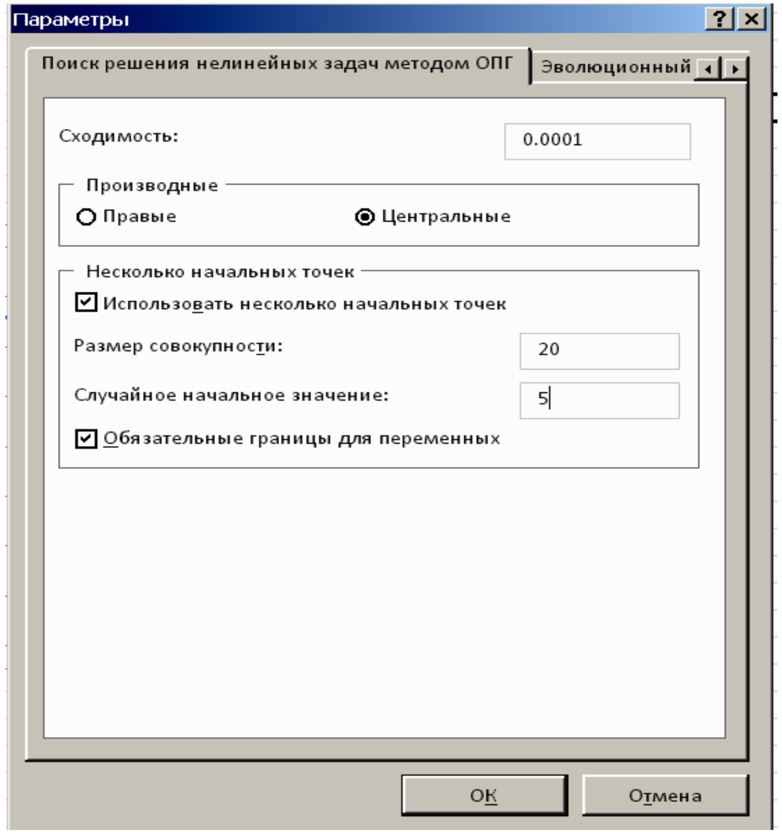

Рис. 14

Следует использовать несколько начальных точек[12] для поиска экстремума, при этом задав начальное значение[13] для генерации случайных чисел.

[12] Было выбрано 20.
[13] Было выбрано 5.

В случае поиска локального экстремума выдается сообщение, что **Решение найдено**. **Все ограничения и условия оптимальности выполнены**.

В случае поиска глобального экстремума выдается сообщение – **Поиск сошелся по вероятности к глобальному решению.**

Найдем глобальный максимум поставленной ранее задачи, взяв в качестве начального приближения граничную точку x = 2, которую в предыдущем случае **Поиск решения** определял, как точку локального максимума и с заданными выше параметрами найдем решение задачи, представленной на рис. 15.

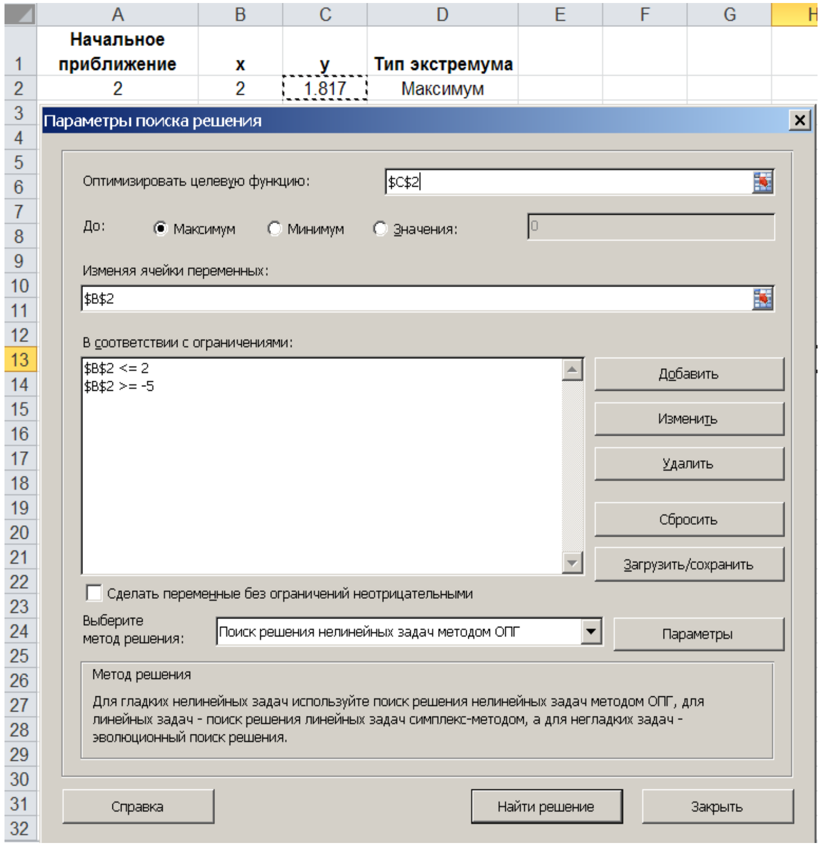

Рис. 15

На рис. 16 видно, что был действительно найден локальный максимум и решение сошлось к нему по вероятности.

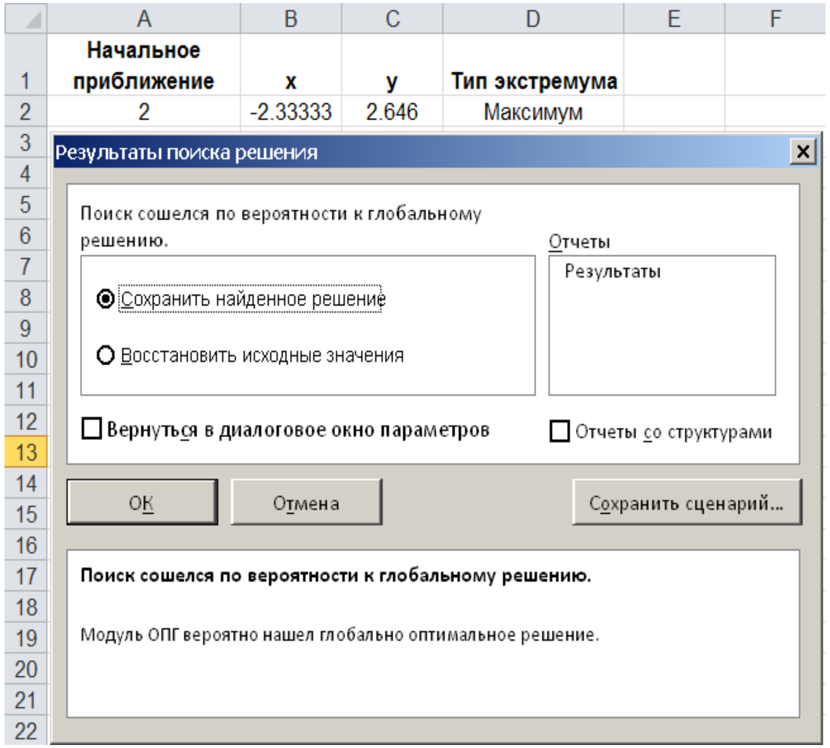

Рис. 16

Рекомендации

На одном листе следует делать только одну постановку экстремальной задачи, так как при сохранении книги на листе сохраняются только последние параметры постановки, настроенные в диалоговом окне **Параметров Поиска решения.** Таким образом, каждый лист в книге может иметь свои настроенные параметры **Поиска решения**, и все они сохранятся при сохранении книги.

Задание № 2

Найти минимум и максимум функции на интервале и построить график.

1) $y^3 = (x-1)^2(x+4)$
$x \in [-5,2]$

2) $y = (x-1)^3$
$x \in [-2,3]$

3) $y = 2 + |x^3|$
$x \in [-5,5]$

4) $y = 2x - x^2$
$x \in [0,10]$

5) $y = (x-2)^2(x+2)^3$
$x \in [-2,5]$

6) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$
$x \in [-3,3]$

7) $y = \dfrac{x^2+20}{x^2-16}$
$x \in [-20,20]$

8) $y = x^5 \sin x$
$x \in [-1,10]$

9) $y = e^{|3x|}$
$x \in [-5,7]$

10) $y = e^{-5x^2} + 20x^2$
$x \in [-5,12]$

11) $y = 2x^2 - |x|$
$x \in [-15,3]$

Задание № 3

Найти решение задачи линейного программирования.

$$F = 5x_1 - 10x_2 \to \min$$

при

$$-2x_1 + x_2 \le 1$$
$$-x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 + x_2 \le 8$$
$$-2x_1 + 3x_2 \ge 4$$
$$4x_1 + 3x_2 \ge 0$$
$$x_1 \ge 0$$

Алгоритм решения

Сформируем рабочий лист так, как показано на рис. 17. В ячейки A3 и B3 введем начальные значения (они могут быть любыми, так как в случае задач линейного программирования, если решение существует, то оно будет найдено, начиная с любого начального приближения к решению), а в ячейку C3 введем целевую функцию F, заменив в ней x1 и x2 на адреса ячеек с соответствующими им значениями. В ячейки B6-B10 введем ограничения, таким образом, как показано на рис. 17.

	A	B	C
1			
2	**x1**	**x2**	**F**
3	1	1	=5*A3-10*B3
4			
5	**Ограничения**		
6	1)	=-2*A3+B3	
7	2)	=-A3+B3	
8	3)	=3*A3+B3	
9	4)	=-2*A3+3*B3	
10	5)	=4*A3+3*B3	
11			
12			

Рис. 17

Для решения поставленной задачи необходимо:

- Выбрать команду **Данные/Поиск** решения и заполнить диалоговое окно **Параметры поиска решения.**
- В поле **Оптимизировать целевую функцию** ввести адрес клетки с целевой функцией, в нашем случае это клетка C3 (абсолютный адрес которой $C$3 появится в поле).
- Среди кнопок альтернативного выбора выбрать кнопку **Минимум**.
- В поле **Изменяя ячейки** переменных ввести адреса клеток, в которых заданы начальные приближения к решению, в нашем случае, этот адрес клетка A3:B3 (абсолютный адрес которых $A$3:$B$3 появится в поле).
- В поле **В соответствии с ограничениями** следует ввести ограничения, распространяющиеся на поиск экстремума. Для чего следует нажать на кнопку **Добавить,** в результате чего откроется диалоговое окно **Добавление ограничения**, которое следует заполнить в соответствии с задачей таким образом, чтобы получить условия:

$B6 \le 1$

$B7 \leq 2$
$B8 \leq 8$
$B9 \geq 4$
$B10 \geq 0$
$A3 \geq 0$

Диалоговое окно **Параметры поиска решения** примет вид:

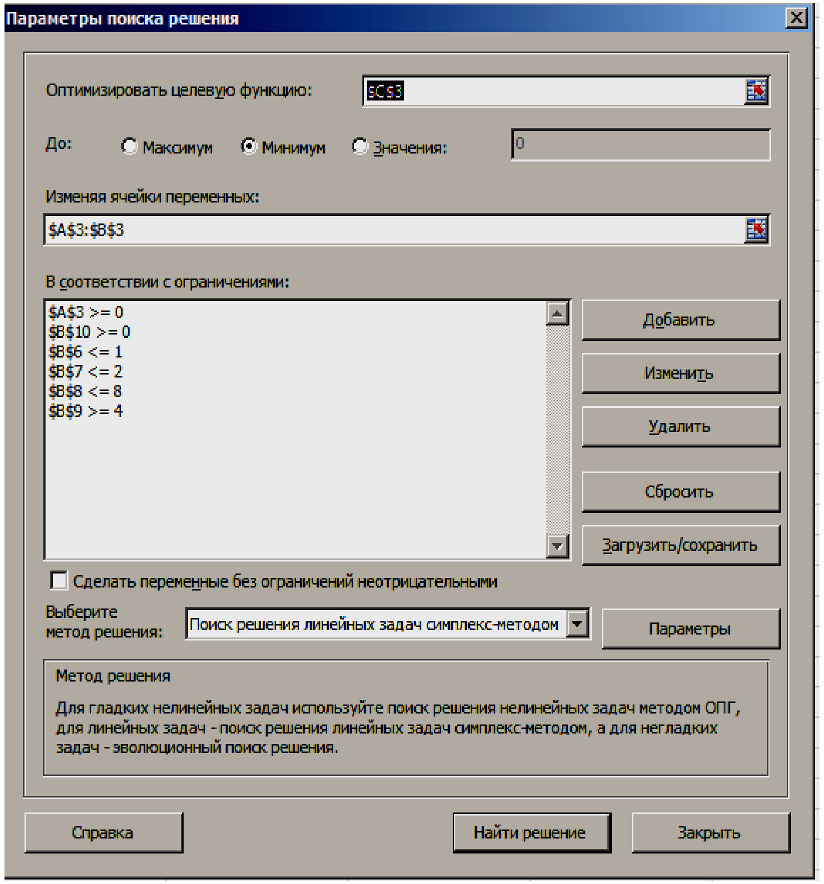

Рис. 18

- В поле **Выберите метод решения** выбрать из списка **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**.
- После щелчка на кнопке **Найти решение** появится окно **Результаты поиска решения**, в котором дается информация о том, найдено ли решение и чему оно равно.
- Выбрать кнопку альтернативного выбора **Сохранить найденное решение**.
- Ок.

	A	B	C
1			
2	x1	x2	F
3	1,5	3,5	-27,5
4			
5	Ограничения		
6	1)	0,5	
7	2)	2	
8	3)	8	
9	4)	7,5	
10	5)	16,5	
11			

Рис. 19

Так как поставленная задача линейного программирования зависит от двух переменных, то можно получить графическую интерпретацию полученного решения, построив область допустимых решений, целевую функцию и точку экстремального решения.

Для построения области допустимых решений проведем прямые линии, соответствующие ограничениям, для чего $\mathbf{x_1}$ зададим произвольно, а $\mathbf{x_2}$ выразим из каждого неравенства системы ограничений.

Для построения целевой функции следует воспользоваться значением экстремального значения равного 27,5 и, подставив его в целевую функцию, при заданном $\mathbf{x_1}$, определить $\mathbf{x_2}$ из уравнения $\mathbf{5x_1–10x_2=27,5}$ Соответствующие расчеты изображены на рис. 20.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	x1	x2	F							
3	1.5	3.5	=5*A3-10*B3							
4										
5	Ограничения									
6	1)	=-2*A3+B3		x1	x2(1)	x2(2)	x2(3)	x2(4)	x2(5)	x2(F)
7	2)	=-A3+B3		-0.5	=1+2*D7	=2+D7	=8-3*D7	=(4+2*D7)/3	=-4*D7/3	=($C$3-5*D7)/-10
8	3)	=3*A3+B3		2	=1+2*D8	=2+D8	=8-3*D8	=(4+2*D8)/3	=-4*D8/3	=($C$3-5*D8)/-10
9	4)	=-2*A3+3*B3								
10	5)	=4*A3+3*B3								
11										

Рис. 20

Для построения области допустимых решений воспользуемся данными, приведенными на рис. 20 и командой **Вставка / Диаграмма / Точечная с прямыми отрезками.** Результат приведен на рис. 21.

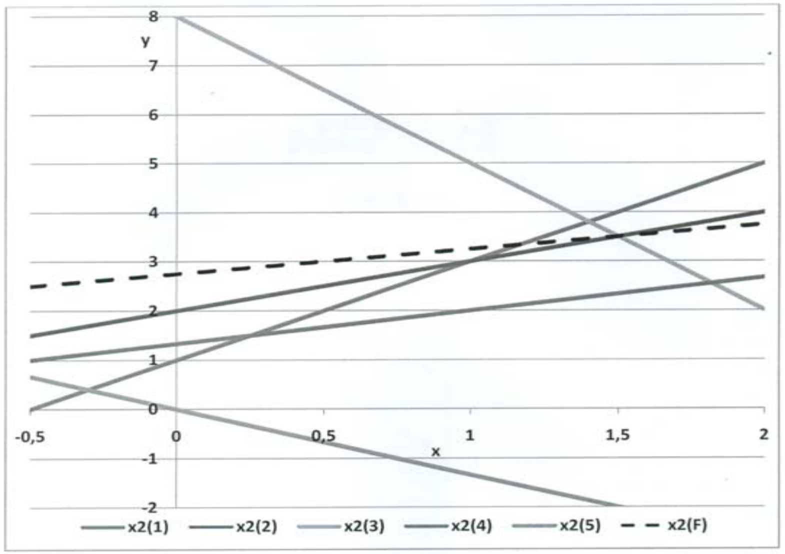

Рис. 21.

Определяя по знаку в каждом неравенстве системы ограничений какая полуплоскость отсечена и найдя их пересечение[14], получим область допустимых решений, представленную на рис. 22.

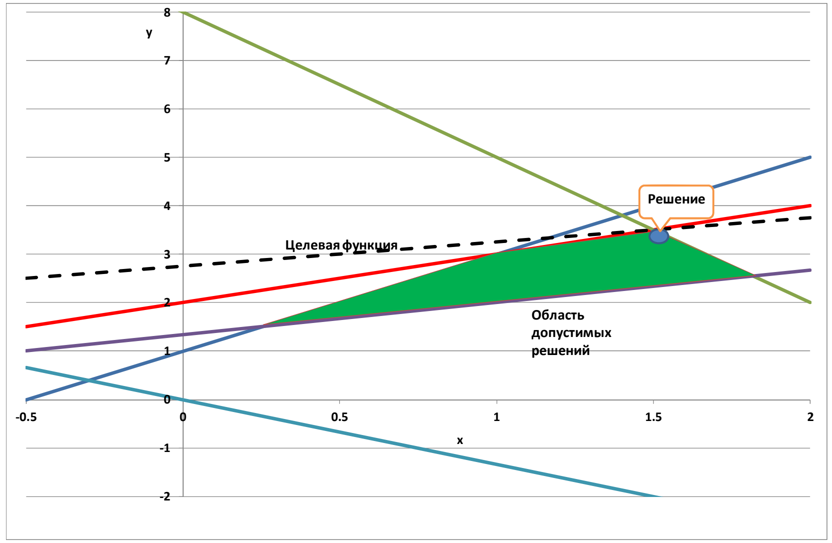

Рис. 22

Задание № 4

Решить предлагаемую задачу с помощью **Поиска решения** и дать графическую интерпретацию области допустимых решений и целевой функции.

[14] Для выделения и заливки области допустимых решений можно воспользоваться полилиниями, выполнив команду **Вставка / Иллюстрации / Фигуры / Линии / Полилинии.**

1)
$F = 2x_1 + x_2 \to \min$

при

$x_1 - x_2 \le 1$

$2x_1 - x_2 \le 1$

$-3x_1 + x_2 \le 0$

$2x_1 - x_2 \le 0$

$2x_1 - 3x_2 \ge 3$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

2)
$F = x_1 - x_2 \to \min$

при

$x_1 + x_2 \le 1$

$x_1 - 2x_2 \le 1$

$-2x_1 + 3x_2 \le 2$

$3x_1 + 2x_2 \le 3$

$x_1 + x_2 \ge \frac{1}{2}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

3)
$F = 4x_1 - 2x_2 \to \max$

при

$-1 \le -x_1 + x_2 \le 1$

$x_1 + x_2 \ge -1$

$-x_1 + 2x_2 \le 2$

$2x_1 - x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

4)
$F = -x_1 + 4x_2 \to \max$

при

$3x_1 + 2x_2 \le 12$

$2x_1 - x_2 \le 0$

$-3x_1 + 2x_2 \le 3$

$x_1 + 2x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

5)
$F = -2x_1 + 2x_2 \to \max$

при

$x_1 + x_2 \ge 1$

$-5x_1 + x_2 \le 0$

$5x_1 - x_2 \ge 0$

$x_1 - x_2 \ge -1$

$x_1 + x_2 \le 6$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

6)
$F = 2x_1 + 4x_2 \to \min$

•*при*

$4x_1 + 3x_2 \le 40$

$12x_1 + 3x_2 \ge 24$

$0 \le x_1 \le 2$

$x_1 + x_2 \le 6$

$0 \le x_2 \le 3$

7)
$F = 3x_1 - x_2 \to \max$

•*при*

$2x_1 + x_2 \ge 0$

$x_1 - 3x_2 \ge 0$

$2x_1 + x_2 \le 3$

$0 \le x_1 \le 2$

$x_1 + x_2 \le 5$

$0 \le x_1 \le 5$

8)
$F = -3x_1 + x_2 \to \max$

при

$x_1 - 3x_2 \le 0$

$2x_1 + x_2 \ge 3$

$x_1 + 4x_2 \ge 4$

$0 \le x_1 \le 5$

$x_1 \ge 0$

9)
$F = -14x_1 + 8x_2 \to \min$

при

$4x_1 - x_2 \ge 0$

$x_1 + x_2 \ge 2$

$x_1 - 2x_2 \le 2$

$7x_1 - 4x_2 \le 28$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 1$

10)
$F = -2x_1 + 2x_2 \to \max$

при

$3x_1 + 4x_2 \le 12$

$-2x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 - 2x_2 \le 5$

$-x_1 - x_2 \le 3$

$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 2$

11)
$F = 6x_1 + 7x_2 \to \max$

при

$x_1 + 3x_2 \le 7$

$-7x_1 + 4x_2 \le 1$

$8x_1 - 3x_2 \le 2$

$x_1 + x_2 = 3$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Задание № 5

По описанию экономической ситуации сделать математическую постановку и решить с помощью **Поиска решения** задачу линейного программирования.

Продукцией городского молочного завода является молоко, кефир и сметана. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока, при этом затраты рабочего времени при розливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 маш/ч. На расфасовке одной тоны сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства молочной продукции завод использует 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 маш/ч, а автоматы по расфасовке сметаны в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 3000, 3255 и 13600 сом. Определить план молочной продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль, если молока должно производиться не менее 80 тонн.

Алгоритм решения

Сформируем лист электронной таблицы, как показано на рис. 23. Целевую функцию запишем в клетку E2, начиная со знака равенства, а вместо переменных молоко, кефир и сметана укажем адреса клеток B2, C2, D2, которые содержат значение начальных приближений к решению. В ячейки B5-B7 введем ограничения, таким образом, как показано на рис. 23.

	A	B	C	D	E
1		**Молоко, т.**	**Кефир, т.**	**Сметана, т.**	**Прибыль, сом**
2		1	1	1	=3000*B2+3255*C2+13600*D2
3					
4	**Ограничения**				
5	1)По цельному молоку	=1.01*B2+1.01*C2+9.45*D2			
6	2) По основному оборудованию	=0.18*B2+0.19*C2			
7	3) По автомату	=3.25*D2			
8					

Рис. 23

Для решения поставленной задачи необходимо:

- Выбрать команду **Данные/Поиск решения** и заполнить диалоговое окно **Параметры поиска решения.**
- В поле **Оптимизировать целевую функцию** ввести адрес клетки с целевой функцией, в нашем случае это клетка C3 (абсолютный адрес которой $C$3 появится в поле).
- Среди кнопок альтернативного выбора выбрать кнопку **Максимум**.
- В поле **Изменяя ячейки переменных** ввести адреса клеток, в которых заданы начальные приближения к решению, в нашем случае это адрес диапазона клеток A3:B3 (абсолютный адрес которых $A$3:$B$3 появится в поле).
- В поле **В соответствии с ограничениями** ввести ограничения, распространяющиеся на поиск экстремума. Для чего следует нажать на кнопку **Добавить,** в результате чего откроется диалоговое окно **Добавление ограничения**, которое следует заполнить в соответствии с задачей:

  $B2 \geq 80$
  $B5 = 136$
  $B6 \leq 21{,}4$
  $B7 \leq 16{,}25$
- Диалоговое окно **Параметры поиска решения** примет вид (рис. 24):

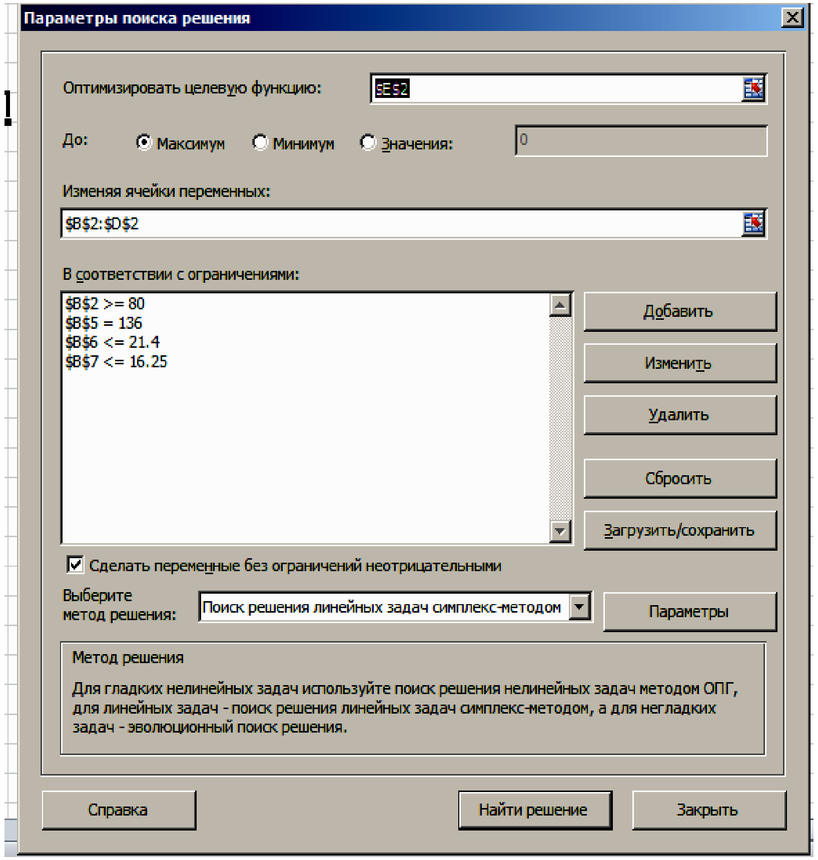

Рис. 24

- Установить флажок рядом с надписью **Сделать переменные без ограничений неотрицательными.** Этого требует экономический смысл задачи.
- В поле **Выберите метод решения** выбрать из списка **Поиск решения линейных задач симплекс-методом.**
- После нажатия на кнопку **Найти решение** появится окно **Результаты поиска решения**, в котором дается информация о том, найдено ли решение и чему оно равно.
- Нажать на кнопку альтернативного выбора **Сохранить найденное решение**.
- Ок.

	A	B	C	D	E
1		Молоко, т.	Кефир, т.	Сметана, т.	Прибыль, сом
2		80.000	36.842	1.904	385 811
3					
4	Ограничения				
5	1)По цельному молоку	136			
6	2) По основному оборудованию	21.4			
7	3) По автомату	6.19			
8					

Рис. 25

Таким образом, максимальная прибыль, которая может быть получена предприятием, составляет 358811 сом. При этом молока следует произвести 80 т, кефира – 36,842 т и сметаны – 1,904 т.

Задание № 6

По описанию задачи сделать математическую постановку, решить с помощью **Поиска решения**, создать отчет и прокомментировать его.

№ 1

В животноводческом предприятии на производство 1 ц молока затрачивается 2500 сом, из них трудовые затраты 1000 сом, материальные – 1500 сом. Производство 1 ц мяса обходится в 18000 сом, из которых трудовые затраты составляют 10000 сом, материальные – 8000 сом. Закупочные цены 1 ц молока 2700 сом, 1 ц мяса – 20000 сом. Определить оптимальный план производства продукции животноводческого предприятия, если правлением выделено 19000000 сом, из которых фонд зарплаты 10000000 сом, а остальное идет на техническое обслуживание предприятия.

№ 2

Фирма изготовляет два типа электрических выключателей, типа А, доход от которых равен 0,4 $ На каждый выключатель и типа В – доход от которых равен 0,3 $. На изготовление выключателя А требуется в три раза больше рабочего времени, чем на изготовления типа В. Если бы изготавливались выключатели только типа В, то дневного рабочего времени хватило бы для изготовления ровно 1000 выключателей. Поставка медного провода обеспечивает изготовление только 800 выключателей в день (любого типа). Для выключателей требуются специальные изоляторы, их можно получить в день для типа А не более 400, для типа В не более 700. Задача состоит в максимизации дохода при всех указанных выше ограничениях.

№ 3

Для перевозки инжира компания использует одно- и двугорбых верблюдов. Двугорбый верблюд может перевезти 1000 фунтов, а одногорбый 500 фунтов. За один переход двугорбый потребляет 3 кипы сена и 100 галлонов воды, одногорбый 2 кипы и 30 галлонов соответственно. Пункты снабжения компании, расположенные в различных оазисах вдоль пути могут выделить не более 900 галлонов воды и 35 кип сена. Верблюды арендуются у пастуха близ Багдада, арендная плата за двугорбого равна 8 пиастров, за одногорбого – 5. Если компания должна перевезти 10 000 фунтов инжира из Багдада в Мекку, то сколько надо использовать одно и двугорбых верблюдов для минимизации арендной платы.

№ 4

Авиакомпания «МОГОЛ» по заказу армии должна перевезти на некотором участке 700 человек. В распоряжении компании имеется два типа самолетов, которые можно использовать для перевозки. Самолет первого типа перевозит 30 пассажиров и имеет экипаж 3 человека, второго типа 65 и 5 соответственно.

Эксплуатация 1 самолета первого типа обойдется 5000 $, а второго 9000 $. Сколько надо использовать самолетов каждого типа, если для формирования экипажей имеется не более 60 человек.

№ 5

Коммерческая ферма в Западном Канзасе производит сено и пшеницу. Сено дает 6 $ прибыли на тонну, а пшеница 18 $ на 10 бушелей. Для получения тонны сена требуется 1 акр земли, 1 человеко/час труда и не требуется удобрений. Для получения 100 бушелей пшеницы требуется 8 акров земли, 3 человеко/часа труда и 1 мешок удобрений. Ферма имеет 40 акров земли, 15 человеко/часов труда и 4 мешка удобрений. Сколько надо произвести сена и пшеницы.

№ 6

Фирма, выпускающая для армии кожаные изделия, изготовляет три вида продукции: А, В и С. Каждый тип продукции должен пройти, по крайней мере, два из трех производственных участков, которые называются дубильным, раскройным и завершающим. Рабочее время каждого из этих участков ограничено в течение месяца следующим образом:

Дубильный участок	320 ч/месяц
Раскройный участок	400 ч/месяц
Завершающий участок	160 ч/месяц

На изготовление единицы продукции типа А требуется 0,2 часа работы дубильного участка и 0,6 часа раскройного; на изготовление единицы продукции типа В требуется 0,3 часа работы дубильного участка и 0,5 часа раскройного; на изготовление единицы продукции типа С требуется 0,4 часа работы дубильного участка, 0,4 часа раскройного и 0,8 – завершающего. С учетом накладных расходов прибыль от каждой единицы продукции составит: А – 6 $, В – 7 $, С – 10 $. Какой тип продукции и в каких объемах выгодно выпускать фирме?

№7

Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используется 2 различных типа досок. Фабрика имеет в наличии 1500 м досок первого типа и 1000 м досок второго типа. Заданы трудовые ресурсы в количестве 800 ч/час. Нормативы затрат каждого из видов ресурсов на изготовление единицы изделия и прибыль от реализации единицы изделия приведены в таблице. Определить оптимальный ассортимент продукции, максимизирующий прибыль.

ресурсы	затраты на единицу изделия			
	столы	стулья	бюро	книжные шкафы
доски 1 типа	5	1	9	12
доски 2 типа	2	3	4	1
трудовые ресурсы, ч/час	3	2	5	10
прибыль, руб/шт	12	5	15	12

№ 8

Цех выпускает изделия 2 видов: валы и втулки. На производство одного вала рабочий тратит 3 часа, втулки – 2 часа. От реализации вала прибыль 80 сом, а от втулки 60 сом. Цех должен выпустить не менее 100 валов и не менее 200 втулок. Сколько валов и втулок надо выпустить, чтобы получить наибольшую прибыль, если фонд рабочего времени 900 ч.

№ 9

При составлении суточного рациона кормления скота используется свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен обладать определенной питательностью (число кормовых единиц не менее 30) и содержать питательные вещества: белок – не менее 1 кг; кальций – не менее 100 г; фосфор – не менее 80 г. В таблице приведены данные о содержании указанных компонентов на 1 кг используемого продукта и себестоимость этого продукта

Продукты	Кормовые единицы, ед/кг	Белок, г/кг	Кальций, г/кг	Фосфор, г/кг	Себестоимость, сом/кг
сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Определить оптимальный рацион кормления скота из условия минимума себестоимости.

№ 10

Фермеру требуется рассчитать такое сочетание сахарной свеклы и ячменя, чтобы получить максимум продукции в кормовых единицах. Для возделывания этих культур в хозяйстве имеется 200 га земли, при этом можно использовать 700 тракторо-смен и 3000 человеко-дней. Урожайность свеклы 280 ц/га, ячменя 23 ц/га. Затраты труда на 1 га свеклы 22 чел./д и 4,5 тракторо-смен; на 1 га ячменя соответственно 2 чел./д и 3 тракторо-смен. Коэффициент перевода в кормовые единицы: для сахарной свеклы – 0,19 , для ячменя – 2,25.

Задание № 7[15]

По описанию кейса, сделать математическую постановку и найти решение с помощью **Поиска решения.**

№ 1

Фирма «Фасад»

Фирма «Фасад» производит двери для продажи местным строительным компаниям. Репутация фирмы позволяет ей продавать всю производимую продукцию. На фирме работает 10 рабочих в одну смену (8 рабочих часов), 5 дней в неделю, что дает 400 часов в неделю. Рабочее время поделено между двумя существенно различными технологическими процессами: собственно производством и конечной обработкой дверей. Из 400 рабочих часов в неделю 250 отведены под собственно производство и 150 под конечную обработку. «Фасад» производит 3 типа дверей: стандартные, полированные и резные. В таблице приведены временные затраты и прибыль от продажи одной двери каждого типа.

	Время на производство (мин)	Время на обработку (мин)	Прибыль
Стандартные	30	15	$ 45
Полированные	30	30	$ 90
Резные	60	30	$ 120

Сколько дверей различных типов нужно производить, чтобы максимизировать прибыль?

Оптимально ли распределение рабочего времени между двумя технологическими процессами (производство и конечная обработка)?

Как изменится прибыль, если распределить рабочее время между этими процессами оптимально?

[15] Все кейсы задания № 5 взяты из книги М.Г. Зайцев, С.Е. Варюхин «Методы оптимизации управления и принятия решений. Примеры, задачи, кейсы», Издательство: Дело, Академия народного хозяйства. Серия: Учебники Президентской Академии, 2011.

На предстоящей неделе «Фасад» должен выполнить контракт на поставку 280 стандартных, 120 полированных и 100 резных дверей.

Для выполнения заказа «Фасад» может закупить некоторое количество полуфабрикатов дверей у внешнего поставщика.

Эти полуфабрикаты «Фасад» может использовать только для производства стандартных и полированных, но не резных дверей.

При этом изготовление стандартной двери требует лишь 6 мин, а полированной – 30 мин процесса обработки (процесс собственно производства для этих полуфабрикатов не требуется).

Полученная таким образом стандартная дверь приносит 15 $ прибыли, а полированная – 50 $.

Предполагая, что по-прежнему 250 часов в неделю отведено под производство и 150 под обработку, определите сколько и каких дверей «Фасад» должен произвести самостоятельно, и сколько полуфабрикатов закупить для изготовления стандартных и полированных дверей?

Как изменится оптимальный план, полученный при выполнении предыдущего пункта, если правильно распределить время между собственно производством и обработкой дверей?

Каково будет правильное распределение в данном случае?

№ 2

На кондитерской фабрике

Борьба научного подхода и эмпирики

Маленькая кондитерская фабрика должна закрыться на реконструкцию. Необходимо использовать оставшиеся запасы сырья, для производства продуктов из ассортимента фабрики, получив максимальную прибыль. Запасы и расход каждого вида сырья для производства единицы продукции каждого вида, а также нормы прибыли для каждого продукта (прибыль на 1 пакет), представлены в таблице.

Сырье	Запасы, кг	Продукты, расход сырья, кг				
		Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка
Темный шоколад	1411	0,8	0,5	1	2	1,1
Светлый шоколад	149	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2
Сахар	815,5	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05
Карамель	466	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5
Орехи	1080	0,7	0,1	0,9	1,5	0
Прибыль/пакет $		1	0,7	1,1	2	0,6

В разговоре с владельцем фабрики мастер, используя свой 20-летний опыт, предлагает «на глазок» выпустить по 200 пакетов каждого продукта, утверждая, что ресурсов «должно хватить», а прибыль получится 1080 $.

При разговоре присутствует сын владельца фабрики, только что закончивший программу «Бакалавр делового администрирования», который утверждает, что такие проблемы надо решать не «на глазок», а с помощью линейного программирования. Умиленный отец обещает сыну всю прибыль сверх 1080 $, если он предложит лучший план, чем многоопытный мастер.

После решения задачи об оптимальном плане производства для родной кондитерской фабрики, юноша (сын владельца фабрики) испытал двойственное чувство. С одной стороны, прибыль, соответствующая найденному им производственному плану, почти на 430 $ больше, чем по плану мастера, т.е. он заработал более 400 баксов. Здорово! С другой стороны, почему компьютер отказался от выпуска «Батончика» (его с раннего детства любимого лакомства)? Юноша был уверен, что «Батончик» – один из лучших продуктов, который выпускает фабрика его отца. Если его не окажется на прилавках, может пострадать имидж фабрики. Ведь не только он сам, но и все соседи в округе обожают эту конфету!

Кроме того, он вспомнил, что на занятиях по количественным методам, преподаватель все время твердил об анализе полученного оптимального решения на устойчивость: малые изменения величины запасов могут привести к радикальному изменению решения! А вдруг этот вредный старый мастер не только план производства определяет на глазок, но и запасы сырья взвешивает кое-как? А что, если каких-то запасов не хватит для его оптимального плана? Он не доберет прибыли! Может быть тогда более прибыльным станет иной план? Какой?

И еще одна мысль. У него есть в кармане, что-то около 50 баксов. Может пустить их в дело? Докупить у знакомого оптовика какого-нибудь сырья, потихоньку подложить на склад (чтоб мастер не заметил), как будто, так и было. Тогда можно получить дополнительную прибыль (и премию от отца). Только вот какого сырья докупать? И сколько? И на сколько от этого возрастет прибыль? Итак, ответьте на следующие вопросы.

Как надо изменить норму прибыли для любимого продукта сына хозяина фабрики («Батончика»), чтобы он вошел в оптимальный план (ответьте, не решая задачу, анализируя лишь отчет об устойчивости)?

Введите это изменение в данные и решите задачу заново. Как изменился оптимальный план?

Какой ресурс является наиболее дефицитным (т.е. максимально влияет на прибыль)?

Можете ли Вы сказать (не решая задачу снова) как изменится прибыль от производства, если количество этого ресурса оценено а) с избытком в 10 весовых единиц; б) с недостатком в 5 единиц?

Есть ли другой способ добиться производства «Батончика» (кроме изменения нормы прибыли)?

Проблема учета постоянных издержек

После проведенного анализа, сын владельца фабрики принес свой первый оптимальный план в цех и с гордостью показал мастеру. Мастер на мгновенье нахмурился («ишь, какой умный нашелся!»), но затем с облегчением вздохнул и громко засмеялся: – «Ну, что ж, молодой человек, замечательно! Будем реализовывать! Только учти, что по технологии до (или после) производства конфет «Белка» (особенно в таком количестве, как ты рекомендуешь), надо остановить производственную линию и тщательно ее вычистить, а то будет брак! А стоит такая очистка 400 $! Так что с премией своей можешь попрощаться». Вот это удар!

Что же делать? Надо срочно пересчитать оптимальный план с учетом этой постоянной издержки. Тем более (вспомнил мальчик), что для этого существует очень изящный метод, использующий целочисленные переменные.

№ 3

Компания «Черные каски»

Горнопромышленная компания «Черные каски» собирается работать в некоторой области в течение следующих пяти лет. У нее имеется 4 шахты, для каждой из которых есть технический верхний предел на количество руды, которая может быть выдана «на-гора» за год. Эти верхние пределы составляют: шахта «Койот» – 2 млн. тонн, шахта «Мокрая» – 2,5 млн. тонн, шахта «Елизавета» – 1,3 млн. тонн и шахта «Ореховый лог» – 3 млн. тонн.

Стоимость извлечения руды на разных шахтах различная, вследствие отличающихся глубины и геологических условий. Эти стоимости составляют (включая последующую обработку): шахта «Койот» – 6 $/т, шахта «Мокрая» – 5,5 $/т, шахта «Елизавета» – 7 $/т и шахта «Ореховый лог» – 5 $/т.

При этом руда из различных шахт имеет и разное содержание извлекаемого компонента. Для упомянутых выше шахт содержание извлекаемого компонента равно: 10%, 7%, 15% и 5% соответственно. Каждая руда перерабатывается по одному и тому же технологическому процессу, а затем смешивается, чтобы получить более-менее однородную руду с заданным и фиксированным содержанием извлекаемого компонента, так как технологический процесс на металлургическом предприятии подстроен под определенное содержание соединений металла в руде.

Так как руды с течением времени становятся беднее, металлургическое предприятие, на которое компания поставляет руду, собирается провести постепенный переход на обработку более бедных руд. Если в первый год предприятие ожидает 5 млн. т руды с содержанием извлекаемого компонента 9%, то во второй и третий годы – 5,63 млн. тонн руды с содержанием 8%, а в четвертый и пятый годы – 6,43 млн. тонн 7%-ной руды.

Соответственно понизится и стоимость руды. Если в первый год руда покупается по 10$ за тонну, то 8%-ная руда будет стоить 8,9 $ за тонну, а 7%-ная –7,8 $ за тонну.

Запланируйте добычу руды на четырех шахтах в течение следующих пяти лет так, чтобы максимизировать прибыль.

Представьте, что владелец горнорудной компании получил предложение о продаже. По оценке экспертов покупатель предлагает цену, превышающую стоимость имущества компании на $70 млн. Однако владелец считает, что за пять лет он заработает большую сумму. Стоит ли в действительности продавать компанию? При оценке стоимости компании примите ставку дисконтирования равной 10% в год.

№ 4

Аренда с предоплатой

Компания должна арендовать складское пространство на 6 месяцев. Известно, какие площади будут требоваться в каждом из этих месяцев. Однако, так как эти пространственные требования весьма различны, неясно, арендовать ли максимальную площадь на 6 месяцев, арендовать ежемесячно только те площади, которые востребованы в данном месяце или попытаться составить оптимальный план аренды на следующие 6 месяцев и заключать договоры по мере необходимости на один или несколько месяцев в соответствии с планом. Требующиеся площади: 30, 20, 40, 10, 50 и 20 тыс. м^2 в январе – июне месяцах соответственно. Стоимость аренды 1 м^2 на 1, 2, 3, 4, 5 и 6 месяцев: 7; 12,8; 18,6; 23,6; 27,5 и 31,2 $ соответственно, оплата вперед за весь срок в пределах 6 мес.

Учтите, что в январе расходы на аренду не должны превышать $400 тыс., а в феврале и в марте по $200 тыс.

Составьте план аренды, минимизирующий затраты.

Сравните с оптимальным планом различные варианты аренды, которые можно было бы предложить, не решая задачу (скажем те, что были упомянуты в условии задачи).

Представьте, что никаких финансовых ограничений нет, сколько денег можно было бы сэкономить на соответствующем этому случаю плане аренды?

Рассмотрите вопрос о кредите, который можно взять в январе под 5% в месяц, чтобы реализовать этот лучший план. Помните, что в реальности вы можете выплатить в первые три месяца только $400, $200 и $200 тыс. соответственно, а в следующие 3 мес. ваши финансовые возможности не ограничены. Стоит ли взять кредит?

№ 5

Большой портфель

Некий бизнесмен, удалясь от дел, решил вложить часть своих накоплений в размере $1 млн. в акции известных компаний. Его помощник собрал данные о доходности 15 компаний за последние 11 лет. Эти данные приведены в таблице[16].

[16] Данные вымышленные.

Компания	Доход по акциям компании, %										
	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
APPLE	13	36	13	–46	15	4	–33	–29	92	202	–67
BOEING	10	0	–22	8	19	63	33	11	–25	4	61
BP AMOCO	20	–12	–28	40	35	30	46	23	14	40	–22
DEBEERS	–1	68	–59	64	11	33	9	–29	–26	83	2
DOW CHEM	–24	14	15	13	13	16	22	22	0	30	–15
DU PONT	1	30	12	1	14	32	46	31	–4	6	–27
EXXON	8	16	1	5	–4	28	22	29	23	7	14
FIAT	–39	–16	–23	24	62	–17	–5	16	4	–8	–10
FORD	–36	–11	75	47	–14	7	13	36	31	–13	–15
GE	–12	21	25	20	–7	50	50	43	23	48	14
G. MOTORS	–7	–11	9	68	–28	35	21	10	27	25	–28
INTEL	–3	11	74	72	0	95	108	28	41	33	–10
LOCKHEED	–21	45	17	35	–2	76	22	8	9	–62	56
MICROSOFT	58	106	38	–12	54	38	83	82	80	44	–39
PEPSICO	34	18	33	–2	–12	57	9	26	9	–16	23

Бизнесмен желает обеспечить доход не менее 18% в год при наименьшем риске. Он слышал, что портфель с наименьшим риском следует формировать по методу Марковица.

Суть этого метода состоит в том, что дисперсия доходности (т.е. риск) портфеля может быть меньше, чем дисперсия любой из этих акций, в случае, когда доходность по акциям меняется в противофазе. Т.е. в то время, когда доходность по одной из акций падает, по другой она обычно растет. Увеличение числа акций в портфеле снижает его дисперсию еще больше. Этот эффект известен в финансах как диверсификация портфеля.

Для **n** видов акций формула дисперсии доходности имеет вид

– ковариации доходности для всех пар видов акций, а $\mathbf{x_i}$ – доля капитала, вложенные в **i-**тый вид акций.

Рассчитайте риск портфеля и его средний доход. Для расчета используйте функцию =КОВАР( ).

Каковы риск (корень из дисперсии портфеля) и ожидаемый доход при вложении одинаковой суммы во все акции?

Сформулируйте на основе построенной таблицы задачу для **Поиска решения** (она получится квадратичной по переменным) и найдите портфель с минимальным риском, дающий не менее 18% дохода.

Каков будет доход портфеля, если добиваться наименьшего возможного риска? Как возрастет риск, если потребовать не менее 25% дохода?

№ 6

Банк «Простор»

Банк «Простор» имеет проблемы с планированием работы персонала в связи с резким изменением потока клиентов в течение дня. Во время наибольшего притока клиентов их количество в единицу времени бывает обычно в 5–6 раз больше, чем в спокойные часы перед закрытием. С помощью теории очередей было рассчитано необходимое для качественного обслуживания количество персонала в каждом часовом промежутке с 9 до 19 часов. Результаты представлены в таблице.

Временной период, время суток	9–10	10–11	11–12	12–13	13–14	14–15	15–16	16–17	17–18	18–19
Количество требуемого персонала, чел.	16	30	31	45	66	72	61	34	16	10

Служащие, занятые в банке полный день, работают либо с 9 до 17 часов, с перерывом на обед с 12 до 13 часов, либо с 11 до 19 часов, с перерывом на обед с 14 до 15 часов. Их часовая ставка составляет 8 $.

Возможно так же использование служащих, занятых неполный день (4 рабочих часа подряд). Их часовая ставка зависит от временного промежутка, на который их нанимают (см. таблицу).

Время найма	9–17	11–19	9–13	10–14	11–15	12–16	13–17	14–18	15–19
Оплата в час, $	8	8	6	7	9	10	8	6	6

Рассчитайте оптимальное количество служащих на полный день и с неполной занятостью и составьте расписание их работы. Какова общая заработная плата всех служащих в день?

Результаты расчета вызвали недовольство руководства, и управляющий потребовал, чтобы в любое время в банке работало не менее 4 служащих, занятых полный день. Составьте новое расписание. Какова теперь общая заработная плата всех служащих в день?

Новые результаты также показались руководству неудовлетворительными, т.к. общее число служащих превысило 100 человек, что должно привести к переходу организации в другую налоговую группу и общему увеличению различных налоговых выплат. Необходимо сократить количество персонала, работающего с клиентами, до 94 человек. Составьте новое расписание. Какова теперь общая заработная плата всех служащих в день?

Контрольные вопросы

1. Дать определение экстремума функции.
2. Что представляет собой безусловный экстремум функции?
3. Что представляет собой условный экстремум функции?
4. Что представляет собой локальный максимум функции?
5. Что представляет собой глобальный минимум функции?
6. Дать определение экономико-математической модели.
7. Что представляет собой целевая функция?
8. Что понимается под итерацией?
9. Какие методы относят к численным?
10. Что представляет собой эндогенная переменная?
11. Что представляет собой экзогенная переменная?
12. Какие задачи относят к задачам математического программирования?
13. По каким основаниям можно классифицировать задачи математического программирования?
14. Чем задача линейного программирования отличаются от общей задачи математического программирования?
15. Чем допустимое решение экстремальной задачи отличается от оптимального?
16. Какие из известных задач относятся к задачам линейного программирования?
17. Какова экономическая интерпретация задачи линейного программирования?
18. На решение каких задач ориентирован инструмент **Поиск решения?**
19. Экстремальные задачи какой размерности можно решить с помощью **Поиска решения?**
20. Можно ли использовать найденную точку минимума функции в качестве начального приближения для поиска точки локального максимума инструментом **Поиск решения?**
21. Если граничная точка не является точкой наибольшего значения функции на заданном интервале, то может ли **Поиск решения** определить ее, как максимальную?

22. Сохраняется ли постановка экстремальной задачи, сделанная в диалоговом окне параметров **Поиска решения** при сохранении EXCEL файла.
23. Чем задачи поиска условного экстремума отличаются от задач поиска безусловного экстремума?
24. К какому широкому классу задач относятся задачи линейного программирования?
25. Как трактуется слово «Программирование» в названии «Линейное программирование»
26. Как трактуется слово «Линейное» в названии «Линейное программирование»
27. С помощью какого метода реализован алгоритм поиска решения задач линейного программирования в EXCEL?
28. Каковы особенности начального приближения к решению при решении задач линейного программирования средствами EXCEL?
29. Чем локальный экстремум отличается от глобального?
30. Какой экстремум локальный или глобальный ищется в EXCEL по умолчанию?
31. Какие методы поиска экстремальных решений реализованы в надстройке **Поиск решения**?
32. Для решения каких задач предназначен нелинейный метод обобщенного понижающего градиента?
33. Для решения каких задач предназначен симплекс-метод?
34. Для решения каких задач предназначен эволюционный метод?
35. Как установить надстройку **Поиск решения**?
36. Как задать неотрицательность получаемого экстремального решения?
37. Как задать целочисленность получаемого экстремального решения?
38. Для чего используется автоматическое масштабирование при решении экстремальных задач?
39. Каким может быть максимальное время поиска экстремального решения?
40. Каким может быть число итераций при поиске экстремального решения?

Примеры тестов

1) Для решения задач линейного программирования в EXCEL используется инструмент:
- Подбор параметра.
- Поиск решения.
- Тренды.
- Анализ данных.

2) От чего зависит случай – когда граничная точка, не являясь точкой наибольшего значения функции на заданном интервале, определена Поиском решения как максимальная?
- Это случайно полученное ошибочное решение.
- Это зависит от начального приближения к экстремуму.
- Это зависит от начального приближения к экстремуму и настроек **Поиска решения.**
- Такого случая не бывает.

3) Для решения каких задач предназначен эволюционный метод?
- Для поиска экстремума гладкой функции.
- Для поиска экстремума функции, у которой хотя бы в одной точке не существует первой производной.
- Для решения задач линейного программирования.
- Для решения задач, связанных с эволюцией курса доллара.

4) Задачи какой размерности можно решить с помощью **Поиска решения**?
- 100 переменных, 100 формульных ограничений.
- 100 переменных, 200 ограничений на переменные.
- 200 переменных, 400 ограничений на значения переменных.
- 200 переменных, 100 формульных ограничений, 400 ограничений на значения переменных.

Рекомендуемая литература

1. Информационные технологии: Учебник для вузов / Под ред. Трофимов В.В. М.: ЮРАЙТ, 2011.
2. *Трофимов В.В*. Информационные системы и технологии в экономике и управлении. М.: Высшее образование, 2-е изд., 2007.
3. *Минько А.А.* Принятие решений с помощью Excel. Просто как дважды два. М.: Эксмо, 2007.
4. *Берк К., Кэйри П.* Анализ данных с помощью Microsoft Excel. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005.
5. *Дубина А.Г., Орлова С.С., Шубина И.Ю., Хромов А.В.* Excel для экономистов и менеджеров. СПб.: Питер, 2004.
6. *Зайцев М.Г., Варюхин С.Е.* Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы. М.: Дело, Серия: Учебники Президентской Академии, 2011.
7. *Граничин О.Н., Кияев В.И.* Информационные технологии в управлении. Режим доступа: http://www.intuit.ru/department/itmngt/itmangt/.
8. Применение Microsoft Excel в экономике: инструменты анализа данных, построение бизнес-моделей, полезные функции на примерах. Режим доступа: http://www.excelbox.ru.

Ирина Викторовна Лукашова

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В EXCEL

Учебно-методическое пособие

Корректор *Дегтярева А.И.*
Компьютерная верстка *Юдаковой Ю.Ю.*

Подписано в печать 12.12.11. Формат $60x84^{1}/_{16}$
Офсетная печать. Объем 3,5 п.л.
Заказ 152. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Горького, 2